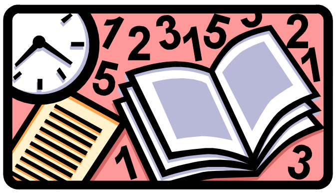
Name:



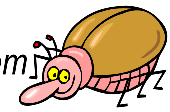
Mathematik-Dossier
Grundoperationen in der Menge $\mathbb{Z}$

Inhalt:

- **Die Erweiterung des Zahlenraumes**
- **Das rechtwinklige Koordinatensystem**
- **Addition und Subtraktion und ihre Verbindung in $\mathbb{Z}$**
- **Multiplikation und Division und ihre Verbindung in $\mathbb{Z}$**
- **Verbindung von Operationen verschiedener Stufe in $\mathbb{Z}$**

Verwendung:

Dieses Dossier dient der Repetition und Festigung innerhalb der obgenannten Themen. Es beinhaltet einen kurzen Theorie-Teil, sowie verschiedene Übungen mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die Aufgaben müssen in der Freizeit (oder in der Hausaufgabenstunde) gelöst werden. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden.

Wichtig: Die Aufgaben erfordern ein konzentriertes Vorgehen. Es ist daher sinnvoll, mindestens während 15 Minuten am Stück daran zu arbeiten, mit Vorteil bearbeitest du ein ganzes Kapitel aufs Mal.

1. Wir erweitern unseren Zahlenraum

1. $\mathbb{N}_0$ ist begrenzt

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$.
Die Menge $\mathbb{N}_0$ ist leider nicht für alle Probleme die ideale Grundmenge. So können wir sehr schnell feststellen, dass wir an die Grenzen des Zahlenraumes stossen, wenn wir

- Im Winter die Temperatur messen wollen
- Im Erdgeschoss in den Lift steigen und ins erste Untergeschoss wollen. Welcher Stock soll das sein?
- Unseren Kontostand ablesen wollen, wenn wir Schulden haben. Es kommt im Monat CHF 1000. – rein und CHF 2000.—werden ausgegeben. Wie viel ist dann noch drauf?
- Die Höhe über Meer angegeben werden soll für Orte wie z.B. den See Genezareth oder Teile Hollands, die unter dem Meeresspiegel liegen.
- Jahresangaben, wenn das Ereignis vor der Geburt Christi stattgefunden hat.

Für alle diese Probleme können wir eine Gemeinsamkeit finden: Es gibt einen „Bezugswert“, dieser ist für unseren Zahlenraum gerade die Grenze, die gerade noch erklärbar ist. Alles „unter“ dem Bezugswert ist in $\mathbb{N}_0$ nicht mehr lösbar.
Es ist also unbedingt nötig, den Zahlenraum zu erweitern.

unter dem Bezugswert (negativ)	***Bezugswert***	***über dem Bezugswert (positiv)***
Temperatur unter Null	Gefrierpunkt (0°C)	Temperatur über Null
Schulden	ausgeglichenes Konto (0 Fr.)	Guthaben
Untergeschoss	Erdgeschoss / Parterre (0)	Obergeschoss
unter Meereshöhe	Meeresspiegel (0 m.ü.M)	über Meereshöhe
Jahreszahl v.Chr.	Christi Geburt (Jahr 0)	Jahreszahl n. Christus
negative Zahlen	Die Zahl 0	positive Zahlen

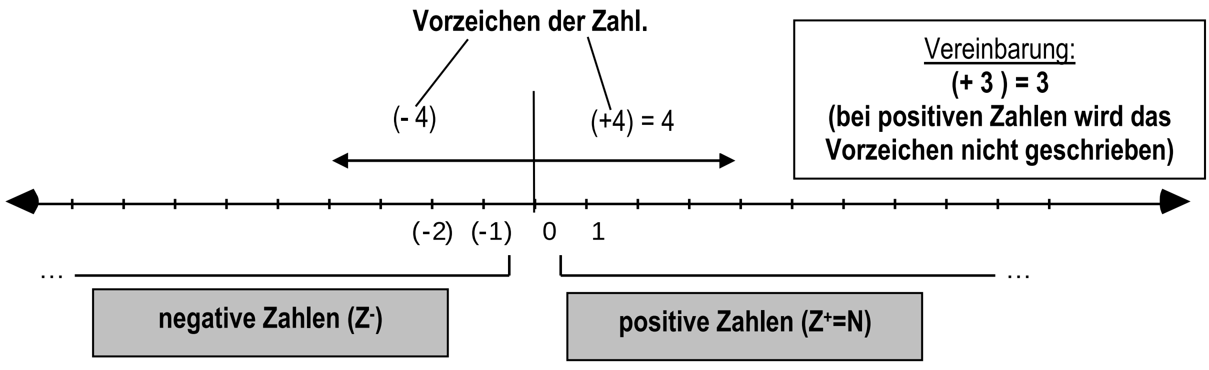
Unser Zahlenraum wird also **erweitert um die negativen, ganzen Zahlen, welche kleiner sind als Null.**

2. Die negativen Zahlen

2.1 Eine Zahl und ihre Gegenzahl:

Wir erweitern den Zahlenstrahl zur Zahlengerade und verwenden 0 als Bezugs- oder Vergleichswert. Es handelt sich also um eine *Art „Punktspiegelung“ des Zahlenstrahls an der Zahl 0*. Somit hat jede Zahl ihre „Bildzahl“ auf der entgegengesetzten Seite des Nullpunktes. Diese Zahl nennt man **GEGENZAHL**.

Damit klar ist, „auf welcher Seite der Null“ die Zahl zu finden ist, wird den Zahlen ein **Vorzeichen** zugeordnet. Ein positives Vorzeichen (+) heisst, die Zahl ist rechts der Null, ein negatives Vorzeichen (-) bedeutet, die Zahl ist links der Null.



Das Vorzeichen der Zahl sagt uns, auf welcher Seite der „Bezugszahl“ Null die Zahl zu finden ist.

2.2 Problem Ordnungsbeziehungen:

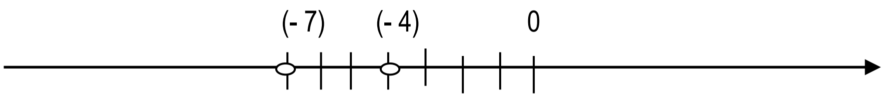
Mit der Einführung der negativen Zahlen wird die Frage der Ordnung nach Grösse etwas komplexer. So muss man nicht mehr einfach „nur" die Zahl betrachten, sondern auch das Vorzeichen. Oder sich sonst Regeln überlegen. Es lässt sich jedenfalls feststellen:

$$\boxed{(-7) < (-4)}$$

Daraus können wir die **Regel** ableiten:

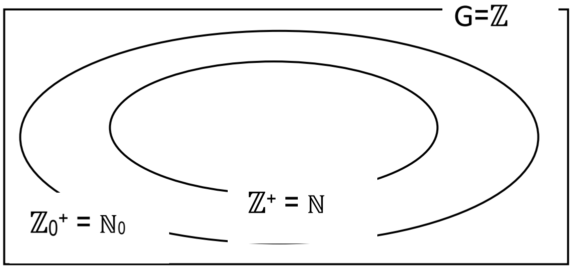
Von zwei Zahlen ist diejenige kleiner, die

- **durch Rückwärtszählen von der anderen aus erreichbar ist**
- **Auf der Zahlengeraden „weiter links" liegt.**



2.3 Der Zusammenhang der Mengen:

Im Venndiagramm dargestellt präsentieren sich die Mengen ℕ, $ℕ_0$ und Z wie folgt:



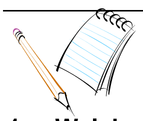
ℤ: Menge der ganzen Zahlen

ℤ+ = $ℕ_0$: Menge der positiven ganzen Zahlen

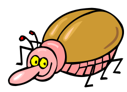
$ℤ_0^+ = ℕ_0$: Menge der pos. g. Zahlen inkl. Null

Es gilt also:

$ℕ \subseteq ℤ$ und $ℕ_0 \subseteq ℤ$

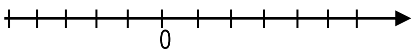


Aufgaben Erweiterung des Zahlenraumes

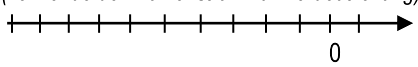


1. Welche Zahl ist .....

a) Um 3 grösser als (-4)
(verwende den Zahlenstrahl zur Verdeutlichung) ....



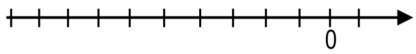
b) Um 5 kleiner als (-6)
(verwende den Zahlenstrahl zur Verdeutlichung) ....



c) Um 32 grösser als (-4) ....

d) Um 24 kleiner als 10 ....

e) Um 7 kleiner als (-4)
(verwende den Zahlenstrahl zur Verdeutlichung) ....



f) Um 3 grösser als (-23) ....

....

g) Um 25 kleiner als 12 ....

h) Um 9 grösser als (-3) ....

2. Bearbeite die folgenden Aufgaben

a) Wahr oder falsch?

	wahr	*falsch*
(-10) > (-6)	☐	☐
(-19) < (-29)	☐	☐
(-21) > (-23)	☐	☐

b) Bestimme die Gegenzahl von:

(+23) ....

(-2) ....

12 ....

3. Bearbeite die folgenden Aufgaben

a) Suche diejenige Zahl, die um 28 grösser ist als die Gegenzahl von 34 ....
b) Suche diejenige Zahl, deren Gegenzahl um 23 kleiner ist als 29 ....
c) Suche diejenige Zahl, die um 23 kleiner ist als die Gegenzahl von (-12) ....
d) Suche diejenige Zahl, deren Gegenzahl um 24 grösser ist, als die Zahl selbst. ....

2. Das rechtwinklige Koordinatensystem

1. Ein geordnetes Zahlenpaar

Das rechtwinklige Koordinatensystem ist so aufgebaut, dass jeder Punkt eine eindeutige Position erhält. Man kann sich das so vorstellen, dass mit zwei Angaben jeder Punkt in der Ebene eindeutig definiert ist.
Beispiele einer solche eindeutigen Zuordnung kenne wir bereits:

- Schiffe-Versenken (A1, B4, C10.. → Eindeutiges Informationspaar)
- Gradnetz der Erde (Koordinaten ! → Eindeutiges Koordinatenpaar)

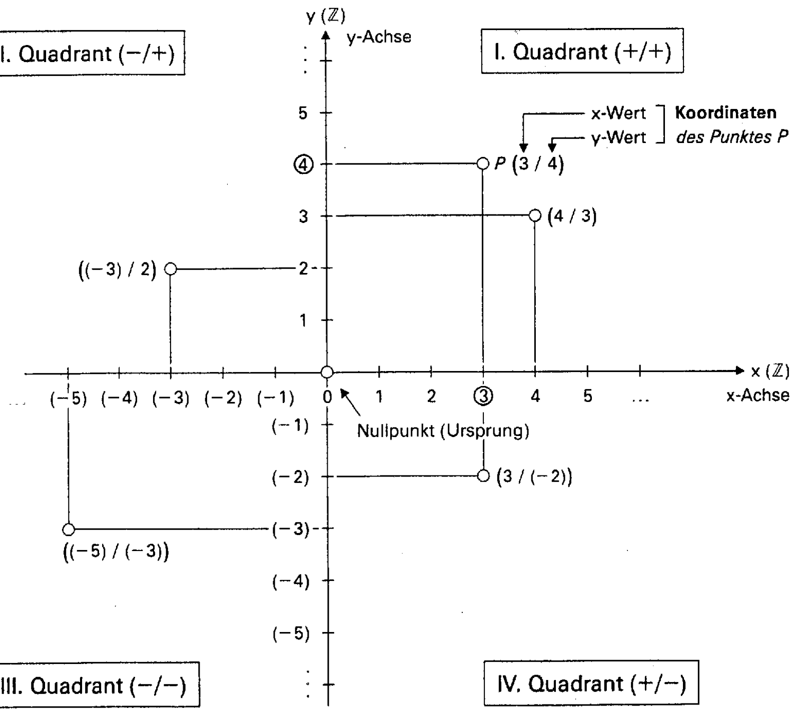
Im rechtwinkligen Koordinatensystem kommen nur Zahlen vor, darum ist es von grosser Wichtigkeit, diese immer in der gleichen Reihenfolge anzugeben. Jeder Punkt bekommt zwei Zahlen, die zusammen ein **geordnetes Zahlenpaar** bilden.

Mit Hilfe des geordneten Zahlenpaars können wir jeden Punkt der Ebene genau beschreiben und verwenden dazu das **rechtwinklige Koordinatensystem**.

2. Das rechtwinklige Koordinatensystem

Mit Hilfe von zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen wird die Ebene in vier Teilbereiche (Quadranten) geteilt. Die beiden Achsen sind die **x-Achse** (Abzisse) und die **y-Achse** (Ordinate). Das geordnete Zahlenpaar enthält somit zwei Informationen, nämlich den x-Wert und den y-Wert der Lage des Punktes. Und zwar in dieser Reihenfolge! Man spricht in diesem Fall auch von der **x-Koordinate (Einheiten auf der x-Achse)** und der **y-Koordinate (Einheiten auf der y-Achse).**

Die Koordinaten der Punkte:
P1: (4 / 3)
P2: (3 / 4)
P3: ((-3) / 2)
P4: ((-5) / (-3))
P5: (3 / (-2))

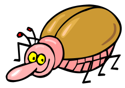


Der Punkt P1 hat die Koordinaten P1 (4/3). Dies bedeutet also, man muss auf der x-Achse 4 und auf der y-Achse 3 Einheiten vom Nullpunkt aus wandern und dort den Schnittpunkt suchen. Dort liegt P1.

Die Koordinatenachsen schneiden sich im Nullpunkt (Ursprung) rechtwinklig.

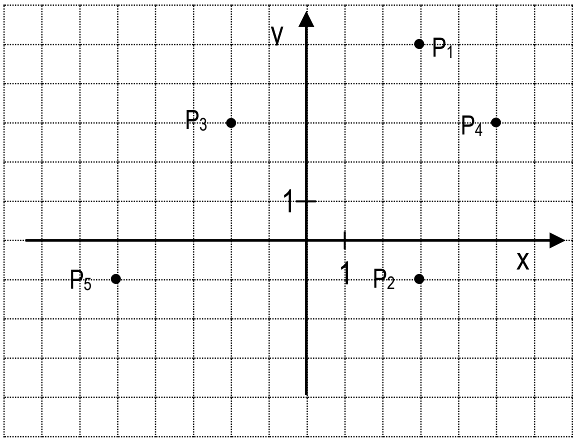
WICHTIG: Die Koordinaten werden immer in der Reihenfolge (x / y) angegeben. Die erste Angabe ist also IMMER DIE X-KOORDINATE, danach folgt die Y-KOORDINATE

Aufgaben zum rechtwinkligen Koordinatensystem:



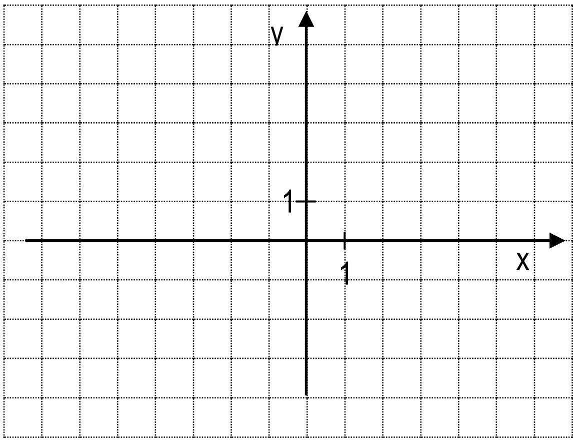
1. Bestimme die Koordinaten der eingezeichneten Punkte. In welchem Quadranten liegen sie?

Punkt	*Koordinaten:*	*Quadrant:*
P_1		....
P_2		....
P_3		....
P_4		....
P_5		....



2. Bearbeite die Aufgaben im rechtwinkligen Koordinatensystem:

a) Zeichne folgende Punkte ein:
A (3 / 6)
B ((-1) / 3)
C (1 / 2)
D (4 / (-2))



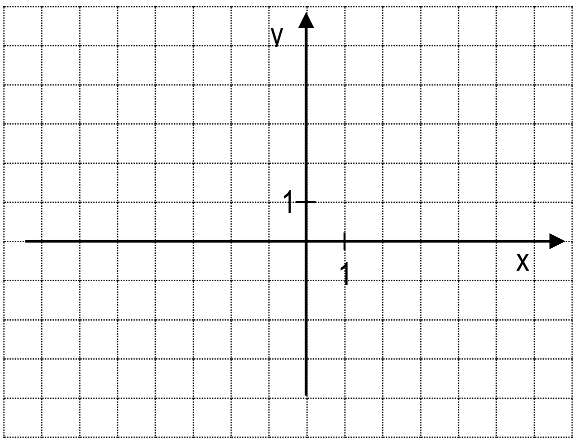
b) Verbinde folgende Punkte mitenander:
A und B
A und C
B und C
B und D

c) Zeichne die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden mit der x-Achse. Bestimme die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Schnittpunkt der x-Achse mit	*Koordinaten:*
Verbindungsgerade AB	....
Verbindungsgerade AC	....
Verbindungsgerade BC	....
Verbindungsgerade BD	....

3. Zeichne im Koordinatensystem ein Viereck mit den Eckpunkten A (3 / 2), B (3 / 4), C (1 / 3) und D(2 / 1):

a) Spiegle das Viereck an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.



b) Spiegle das erhaltene Bildviereck an der Winkelhalbierenden des 2. Quadranten.

c) Verbinde jeden Bildpunkt des jetzt erhaltenen Viereckes mit den Punkten des Originalvierecks. Was kannst du feststellen?

....

d) Bestimme die Koordinaten der Bildpunkte nach der zweiten Spielgelung. Was kannst du feststellen?

....

....

3. Addition und Subtraktion in $\mathbb{Z}$ – Operationen und ihre Verbindung.

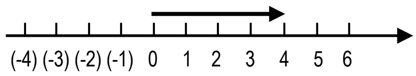
1. Die Addition in $\mathbb{Z}$

1. 1 Addition durch Darstellung auf der Zahlengerade

Die Regeln der Addition haben wir schon in $\mathbb{N}_0$ behandelt. Daran hat sich nichts geändert. So werden wir die Addition in Z nun mit den gewonnenen Betrachtungsweisen anschauen und uns v.a. der Darstellung mit dem Zahlenstrahl annehmen.

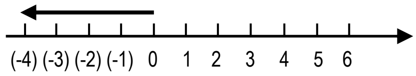
Bevor wir das aber auf ein Beispiel anwenden, möchten wir die Pfeildarstellung für negative Zahlen unter die Lupe nehmen:
Bei den positiven Zahlen haben wir die Zahlen als Pfeile dargestellt, die von ihrem Startpunkt aus entsprechend ihrem Wert eine Anzahl Einheiten auf dem Zahlenstrahl lang gezeichnet werden. Das bleibt genau so.

Die Zahl 4 sieht also so aus:



bei Null ansetzen, den Pfeil vier Einheiten lang zeichnen

Die gleiche Überlegung zeigt die Zahl **(- 4)**:



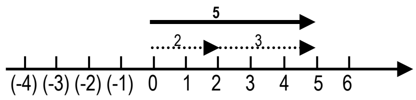
bei Null ansetzen, den Pfeil vier Einheiten lang zur Markierung - 4

Der Pfeil ist also gleich lang, da auch 4 Einheiten gezählt werden, die Pfeilspitze zeigt aber in die andere Richtung. Das Vorzeichen „Minus" hat also die Funktion „Pfeil mach kehrt"

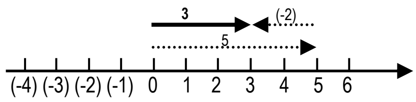
Die Addition mit Darstellung auf der Zahlengeraden funktioniert noch immer genau wie in $\mathbb{N}_0$. Addieren heisst, Pfeile aneinanderreihen (Pfeilanfang an die Spitze des vorherigen Pfeiles ansetzen). Das Ergebnis lässt sich dann ablesen, wenn man wieder von Null her bis zur letzten Pfeilspitze auffüllt.

Beispiele:

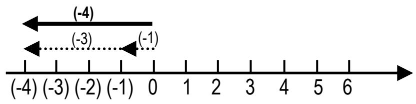
2 + 3 = 5



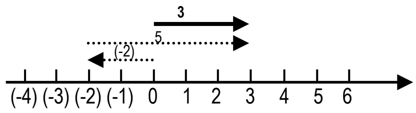
5+ (-2) = 3



(-1) + (-3) = (-4)



(-2) + 5 = 3



1. 2 Addition mittels Betrag

Von jeder Zahl lässt sich der sogenannte Betrag bestimmen. Dieser besteht aus dem Zahlwert ohne Vorzeichen. Es lässt sich also sagen, dass der Betrag einer Zahl immer positiv ist. Der Betrag einer Zahl ist immer positiv!

Beispiele:

Zahl:	*Betrag:*	*offizielle Schreibweise*
(-1)	1	$\lvert(-1)\rvert = 1$
1	1	$\lvert 1\rvert = 1$
(-15)	15	$\lvert(-15)\rvert = 15$
15	15	$\lvert 15\rvert = 15$

Aus dieser Betragsüberlegung leiten sich die Additionsregeln für negative Zahlen ab:

Regel 1: Eine **negative und eine positive Zahl werden addiert**, indem man die Zahl mit dem kleineren Betrag von der Zahl mit dem grösseren Betrag subtrahiert. Dem Ergebnis ordnet man das Vorzeichen der betragsgrösseren Zahl zu.

5	+	(-3)	=	2	
Betrag 5		Betrag 3		Betrag 2 *(5-3)*	*Das Ergebnis ist positiv, weil die betragsgrössere Zahl positiv ist.*

Regel 2: **Zwei negative Zahlen werden addiert,** indem man **ihre Beträge addiert**. Dem Ergebnis ordnet man das negative Vorzeichen zu.

(-4)	+	(-7)	=	(-11)	
Betrag 4		Betrag 7		Betrag 11 *(4+7)*	*Dem Ergebnis wird das negative Vorzeichen zugeordnet.*

1. 3 Addition mit dem Schulden - Guthaben - Modell

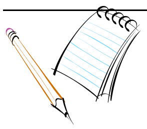
Jeder kennt die Situation, mal Schulden zu haben. Man leiht mal schnell etwas Geld aus, um etwas zu bezahlen. Damit lässt sich sehr gut auch die Addition in $\mathbb{Z}$ verstehen. Dabei werden die **positiven Zahlen als Guthaben**, die **negativen Zahlen als Schulden** aufgefasst.

Beispiele:

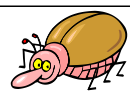
8	+	(-5)	=	3
8.—Fr. Guthaben		5.—Fr. Schulden		3.-- Fr. Guthaben
9	+	(-14)	=	(- 5)
9.—Fr. Guthaben		14.—Fr. Schulden		5.-- Fr. Schulden
(-23)	+	(-13)	=	(- 36)
23.—Fr. Schulden		13.—Fr. Schulden		36.-- Fr. Schulden

1. 4 Gesetzmässigkeiten

Die Gesetze, denen die Addition unterliegt, haben sich nicht geändert. Noch immer die die **Addition kommutativ (Vertauschungsgesetz) und assoziativ (Verbindungsgesetz mit Klammern!). Ebenso ist das Operatorkonzept gültig.**



Aufgaben zur Addition in $\mathbb{Z}$:



1. Löse die folgenden Aufgaben:

a) (-12) + 23 = ...
b) (-123) + (-3) = ...
c) *(-34)* + *4* = ...
d) 43 + (-34) + 3 = ...
e) 152 + (-135) + (-15) = ...
f) (-89) + (-5) + 90 = ...
g) 43 + 34 + (-3) = ...
h) 15 + 48 + (-60) = ...
i) (-215) + (-15) = ...

2. Bestimme den Betrag der Zahl:

a) $\lvert 15\rvert$ = ...
b) $\lvert(-32)\rvert$ = ...
c) $\lvert(-13)\rvert$ = ...
d) $\lvert(-1232)\rvert$ = ...
e) $\lvert(+232)\rvert$ = ...
f) $\lvert(-32231)\rvert$ = ...

2. Die Subtraktion in ℤ

2. 1 Subtrahieren heisst: Gegenzahl addieren!

Wir verwenden die Addition, um die Subtraktion zu erklären:

7 – 4 = 3 **weil** 3+ 4 = 7 Dasselbe Ergebnis ergibt sich in einer Addition aus 7 + (-4) = 3

somit gilt:

7 – 9 = (-2) *weil* *(-2) + 9 = 7*

7 – 9 = (-2) = 7 + (-9)

Gegenzahl

4 – (-11) = 15 *weil* *15 + (-11) = 4*

4 – (-11) = 15 = 4 + 11

Gegenzahl

(-4) – (-6) = 2 weil 2 + (-6) = (-4)

(-4) – (-6) = 2 = (-4) + 6

Gegenzahl

Eine ganze Zahl wird subtrahiert, indem man ihre Gegenzahl addiert. (→ Summenverwandlung)

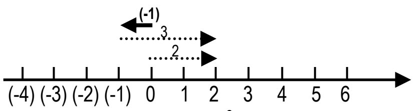
➔ *Man kann also jede Differenz als Summe schreiben.*

2. 2 Subtrahieren mit Hilfe der Zahlgeraden-Darstellung!

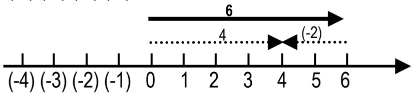
Natürlich kann die Subtraktion auch mit Hilfe der Zahlenstrahldarstellung gelöst werden. Trotzdem ist die Version mit dem Addieren der Gegenzahl vorzuziehen.

Beispiele (Erinnerst du dich: Subtraktion heisst, die Pfeile mit „Spitz an Spitz“ aneinander zu reihen und dann von Null her auffüllen:

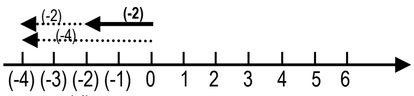
2 - 3 = (-1)



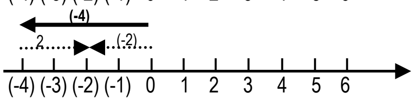
4- (-2) = 6

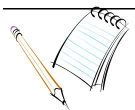


(-4) - (-2) = (-2)

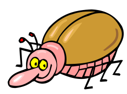


(-2)- 2 = (-4)





Aufgaben zur Subtraktion in ℤ:



1. Löse die folgenden Aufgaben. Forme die Subtraktion zuerst in die Addition der Gegenzahl um:

a) (-12) – (-12)= .... = ...

b) 1234 - 121 = ... = ...

c) (-34) – (+12) = ... = ...

d) 12 – (-34) = ... = ...

e) 34 – (-34) = ... = ...

f) (-342) – 33 = ... = ...

g) 34 – (-33) + 3 = ... = ...

h) 235 – (+32) + (-3)= .... = ...

3. Die Verbindung Operationen erster Stufe (Addition/Subtraktion) in ℤ

3.1 Die Werkzeuge anwenden, die wir kennen

Wie schon damals, als wir die Verbindung von Addition und Subtraktion in $\mathbb{N}_0$ betrachtet und untersucht haben, gelten auch in ℤ die gleichen Regeln:

- Rechne immer von links nach rechts
- Klammern zuerst behandeln (1. Einschränkung)

> Die **Hilfsmittel,** die wir zum Ausrechnen von Termen benützen dürfen, sind die folgenden:
>
> - **Summenverwandlung (NEU: Subtraktion heiss Addition der Gegenzahl)**
> - **Operatorkonzept (Vorsicht: Operationszeichen und Vorzeichen nicht verwechseln!)**
> - **Klammerregeln**

Beispiele:

(- 38) – (-54) + (-19) – 5

= $\boxed{(-38)}\ \boxed{+ 54}\ \boxed{+ (-19)}\ \boxed{+ (-5)}$ — Summenverwandlung

= 54 + (-38) + (-19) + (-5) — Operatoren vertauschen

= 54 + **[** (-38) + (-19) + (-5) **]** — Klammer setzen

= 54 + (-62) — Klammer ausrechnen

= <u>**(-8)**</u>

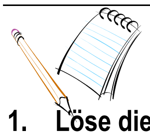
(- 23) – **[** 8 + (-17) – (-11) **]**

= (-23) - 8 - (-17) + (-11) — Klammer öffnen/auflösen (Achtung:Operationszeichen in Klammer)!

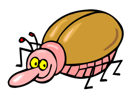
= $\boxed{(-23)}\ \boxed{+ (-8)}\ \boxed{+ 17}\ \boxed{+ (-11)}$ — Summenverwandlung

= 17 + (-23) + (-11) + (-8) — Operatoren vertauschen

= <u>**(-25)**</u> — von links nach rechts rechnen.



Aufgaben zur Verbindung von Addition und Subtraktion in ℤ:



1. Löse die folgenden Aufgaben. Forme die Rechnungen wie im Beispiel oben um:

Umformung:

a) (-247) - [(-372) - 1328 - (-4353)]

b) 6862 + [(-1014) + (-5286) - (-4338)]

Umformung:

c) (-723) - [942 - (-1877) + (-1442)]

d) 128 - [5413 + (-4272) - (-6487)]

2. Schreibe zuerst die Rechnung auf und löse sie dann:

a) Herr Hungerbühler hat ein Vermögen von CHF 3900.--. Davon gibt er an Anlässen CHF 234.— aus. Es folgen zudem Einkäufe von CHF 123.— . Anschliessend erhält er von einem Kollegen CHF 300.—geschenkt. Wie gross ist sein Guthaben jetzt noch?

b) Subtrahiere von der Summe von (-45) und (-3) deren Differenz.

c) Addiere zur Summe von (-234) und 12 die Differenz dieser beiden Zahlen.

d) Addiere zur Summe aus (-23) und der Gegenzahl von 18 die Differenz von (-67) und der Gegenzahl von (-12)

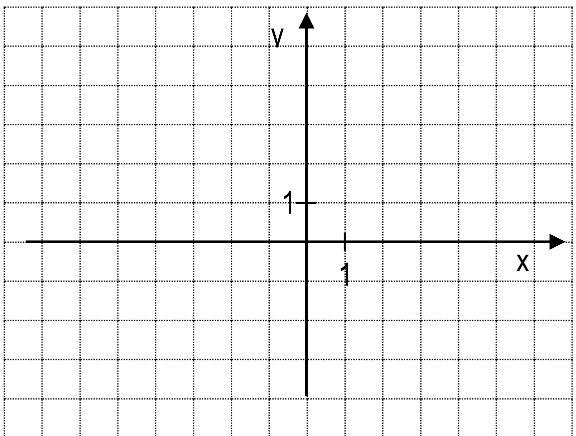
3. Zeichne im rechtwinkligen Koordinatensystem:

a. Zeichne das Dreieck mit den Eckpunkten A(2/1), B(3/(-2)) und C((-1)/(-3))

b. Zeichne mit anderer Farbe das Dreieck, das du erhältst, wenn du zu jedem x-Wert (-1) addierst.

c. Zeichne mit anderer Farbe das Dreieck, das du erhältst, wenn du von jedem y-Wert des Ausgangsdreieckes (-2) subtrahierst.

d. Addiere zu jedem x-Wert des Ausgangsdreiecks (-2) und subtrahiere von jedem y-Wert (-1). Zeichne das neue Dreieck mit einer anderen Farbe.



4. Multiplikation und Division in ℤ – Operationen und ihre Verbindung

1. Die Multiplikation in ℤ

1. 1 Gedankenstütze „Schulden –Guthaben – Modell“

Schulden hast du – so hoffe ich – nicht. Aber sicher mal Monopoly gespielt. Und dort entweder von allen Geld (und dann irgendwann einmal auch Schuldscheine) erhalten oder überall dein Geld abgeliefert. Ganz ähnlich funktioniert das „Schulden-Guthaben-Modell“, mit dem wir die Multiplikation in ℤ betrachten.

Stell dir also vor

beim ersten Faktor des Produktes

- positive Zahlen bedeuten „ich erhalte“ (eine Anzahl Gut- oder Schuldscheine)
- negative Zahlen bedeuten: „ich gebe ab“ (ein Anzahl Gut- oder Schuldscheine)

beim zweiten Faktor des Produktes

- positive Zahlen sind „Guthaben“ oder „Gutscheine“, also etwas, was dein Vermögen vergrössert.
- negative Zahlen sind „Schuldscheine“, also etwas, was dein Vermögen verkleinert.

So betrachten wir die folgenden Rechnungen:

Rechnung	*Bedeutung*	*Folge*	
(-3) • (-20)	➔ Ich *gebe* der Bank 3 Schuldscheine zurück	→ Ich werde **um Fr. 60.—reicher**	Vermögen **+ 60**
(-3) • 20	➔ Ich *gebe* der Bank 3 Gutscheine zurück	→ Ich werde **um Fr. 60.—ärmer**	Vermögen **– 6**0
3 • (-20)	➔ Ich *bekomme* 3 Schuldscheine	→ Ich werde **um Fr. 60.—ärmer**	Vermögen **– 60**
3 • 20	➔ Ich *bekomme* drei Gutscheine	→ Ich werde **um Fr. 60.—reicher**	Vermögen **+ 60**

1. 2 Gedankenstütze „Multiplikationstafel mit ganzen Zahlen“.

Nicht überzeugt? Nun, kein Problem: Wir versuchen es mit der „Multiplikationstafel“ aller ganzen Zahlen. D.h. für den Anfang tut es auch ein Ausschnitt aus allen Zahlen. Zum Beispiel alle Zahlen von (-3) bis (+3). Das sieht dann so aus:

Faktor 1

Faktor 2

•	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	-9	-6	-3	0	3	6	9
2	-6	-4	-2	0	2	4	6
1	-3	-2	-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0
-1	3	2	1	0	-1	-2	-3
-2	6	4	2	0	-2	-4	-6
-3	9	6	3	0	-3	-6	-9

2 • 2 = 4

2 • (- 2) = (-4)

(-2) • (-2) = 4

(-2) • 2 = (-4)

Wenn du jetzt gut hinsiehst, kannst du eine Art Kreuz mit den Nullen erkennen. Die sehen aus wie die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wenn du also den Inhalt des 1. Quadranten an der y-Achse spiegelst, erhältst du das entsprechende Spiegelbild (und darum umgekehrte Vorzeichen!). Spiegelst du den 2. Quadranten an der x-Achse bekommst du den 3. Quadranten. Dieser ist wieder mit umgekehrtem Vorzeichen (und darum wieder positiv). Und so kannst du auch den 4. Quadranten durch Spiegelung des 1. oder 3. Quadranten erhalten.

1.4 Gedankenstütze „Sprachlich“

Es ist eigentlich klar, dass eine positive Zahl mit einer negativen Zahl multipliziert ein negatives Ergebnis ergeben. Doch dass zwei negative Zahlen miteinander multipliziert wieder eine positive Zahl geben, ist nicht für alle gerade einleuchtend. Haben dir die obigen Bespiele nicht geholfen, kannst du vielleicht mit der Sprache etwas anfangen. Minus mal Minus ist also so etwas wie eine doppelte Verneinung. In einem Satz sieht das so aus:

„Ich gehe nicht nicht nach Zürich“. Schlussfolgerung: **Nicht** nicht nach Zürich ist dasselbe wie „nach Zürich“.
Der Satz heisst also, „Ich gehe nach Zürich“. Genauso ist die Multiplikation von zwei negativen Zahlen zu verstehen.

1. 5 Gedankenstütze „Faustregel“.

Auch nicht klar? Dann merk dir die Faustregel:

1. „Minus mal minus gleich plus“
2. „Minus mal plus gleich minus“

•	+	-
+	+	-
-	-	+

1.5 Vorzeichen bei Produkten mit drei und mehr Faktoren

Wirst du gefragt, welches Vorzeichen das Ergebnis der untenstehenden Rechnung hat, solltest du sofort Auskunft geben können. Dies ganz ohne zu Rechnen, nur durch geschicktes Nachdenken.

(-10) • 15 • (-24) • 1588 • (-445) • (- 15628) • 13 → Das Vorzeichen des Ergebnisses ist **positiv**

Warum?

Durch Umstellen der Rechnung (Operatorkonzept) bekommst du:

(-10) • (-24) • (-445) • (- 15628) • 13 • 15• 1588

Nun wird das Assoziativgesetz (Zusammenfassen von Faktoren durch Klammern) angewendet:

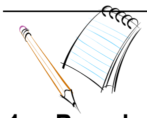
((-10) • (-24) **)** • **(** (-445) • (- 15628) **)** • 13 • 15• 1588

Die Klammern umfassen jetzt je zwei negative Faktoren. Das Produkt aus diesen beiden ist mit Sicherheit positiv. Ansonsten sind nur noch positive Faktoren vorhanden. ➔ Das Produkt am Ende der Rechnung ist also sicher positiv.

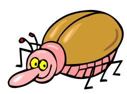
Es gilt also: Die Anzahl Faktoren bestimmt das Vorzeichen des Produktes:

- **Ungerade Anzahl** negativer Faktoren : **Negatives Produkt**
- **Gerade Anzahl** negativer Faktoren: **positives Produkt**

→ Bei Potenzen: $(-10)^2$ ➔ 100 (positiv, da Exponent = Anzahl Faktoren = gerade)
$(-5)^3$ ➔ (-125) (negativ, da Exponent = Anzahl Faktoren = ungerade)
Aber: (-10^2) ➔ (-100), da hier nicht „Klammer zuerst“



Aufgaben zur Multiplikation in ℤ:



1. Berechne die Produkte:

a) (-4) • 5 = ...
b) (-3) • (-25) = ...
c) 3 • (-34) = ...
d) (-123) • 9 = ...
e) 23 • (-2) • 3 = ...
f) 41 • (-4) = ...
g) (-34) • 5 • (-1) = ...
h) (-2) • 76 • (-1) • (-4) = ...

2. Bestimme, ob das Ergebnis positiv oder negativ wird:

	positiv	negativ
a) (-1213) • 121215 • (-123) • (-23) • 122	☐	☐
b) (-2) • (-1) • (-1) • (-2) • 3 • (-23) • 2	☐	☐
c) 123 • 3223• 3 • 32 • 232 • (-23) • 2 • (-3)	☐	☐
d) $(-3)^{435}$	☐	☐
e) $(-23)^{32}$•$(-23)^2$	☐	☐
f) $(-13)^{5467}$ • 8234 • (-1)	☐	☐

3. Setze für x die richtige Zahl aus Z ein.

a) (-3) • x = 45 .... x= ....
b) (-23) • x = (-69) .... x= ....
c) 45 • 2 • x = (-90) .... x= ....
d) (-x) • 12 = (-24) .... x = ...
e) (-23) • x • (-3) = (- 138) .... x = ...
f) (-3) • x • (-23) = 207 .... x = ...

4. Welches Ordnungszeichen (< , > oder =) musst du einsetzen, dass wahre Aussagen entstehen?

a) 10^3 ☐ $(-10)^4$
b) (-10^3)☐ (-10^4)
c) $-(10^6)$☐ 10^5
d) $(-10)^5$ ☐ $(-10)^6$
e) (-10^3)☐ $(-10)^3$
f) 10^3 ☐ $(-10)^{17}$
g) 10^2 ☐ $(-10)^3$
h) 10000 ☐ $(-10)^4$
i) 100 ☐ $(-10)^3$

2. Die Division in $\mathbb{Z}$

2. 1 Faustregeln für die Umkehrung der Multiplikation

Die Division hat genau eine Begründung. Sie ist die Umkehrung der Multiplikation. Als solche ist sie auch zu verstehen und zu behandeln. Jede Betrachtung der Division kann also nur über die Multiplikation erfolgen.

Da die Division also die Umkehrung der Multiplikation ist, gilt:

63 : 9 = 7, ***weil 7 • 9 = 63***

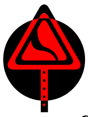
<u>somit gilt:</u>

(-56)	:	7	=	(-8)	*weil (-8) * 7 = (-56)*
44	:	(-11)	=	(-4)	*weil (-4) * (-11) = 44*
(-48)	:	(-6)	=	8	*weil 8* (-6) = (-48)*

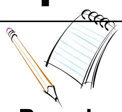
Die Faustregeln lassen sich genau so von der Multiplikation ableiten:

1. „Minus geteilt durch minus gleich plus“
2. „Minus geteilt durch plus gleich minus“

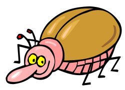
:	+	-
+	+	-
-	-	+



➢ **Achtung: Die Division durch Null ist und bleibt verboten!**



Aufgaben zur Division in $\mathbb{Z}$:



1. Berechne den Quotienten

a) (-50) : 5 = ...

b) (-300) : (-25) = ...

c) (-303) : 3 = ...

d) 0 : (-34) = ...

e) (-34) : 0 = ...

f) 50 : (-5): (-2) = ...

g) (-23) : (-1) = ...

h) (-2) : (-1) : 1 : (-2) : (-1) = ...

3. Die Verbindung von Operationen zweiter Stufe (Multiplikation/Division) in $\mathbb{Z}$

3. 1 Hilfsmittel

Genau wie in $\mathbb{N}_0$ gelten auch in Z die identischen Regeln für die Verbindung von Operationen zweiter Stufe in Z.

Da sind erstens die **Grundregeln:**

- Rechne immer **von links nach rechts**
- ABER: **Klammern zuerst** behandeln (1. Einschränkung)

Als **Hilfsmittel** für die Behandlung solcher Terme stehen uns zur Verfügung:

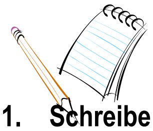
- **Klammerregeln** (Vor der Klammer ein :, Klammer nur weglassen, wenn Operationszeichen in der Klammer gewechselt wird!)
- **Operatorkonzept** (Ganze Operatoren (Operationszeichen und nachfolgende Zahl) dürfen umgestellt werden)

Eine Schwierigkeit stellt sich bei diesen Termen: **Man darf die Vorzeichen und die Operationszeichen nicht verwechseln!**

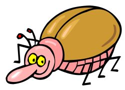
Operationszeichen
gibt an, „was mit der Zahl gemacht wird“

(-324) • 41 : (-25) : (-25) • 4

Vorzeichen
(gehört zur Zahl, gibt an „was für eine Zahl das ist“!)



Aufgaben zur Verbindung von Operationen zweiter Stufe in $\mathbb{Z}$:



1. Schreibe ohne die eckige Klammer und berechne (Schreibe alle Umformungen auf)

a) (-280) : [5 • (-28)] = ... = ...

b) (-1224) : [2448 : (-2)] = ... = ...

c) (-36) • [(-34) : 18] = ...
.... = ...

d) [56 • 21 : (-13)] : [14 • 7 : 78] = ...
.... = ...

2. Setze für x die richtige Zahl aus Z ein.

a) (-3) • x = (-57) .... x= ......

b) (- 42) : x = (-7) .... x= ......

c) (-145) • x = 580 .... x= ......

d) 0 • x = 0 x =

e) x : 0 = (-4) x =

f) (-x) : 18 = 162 .... x = ...

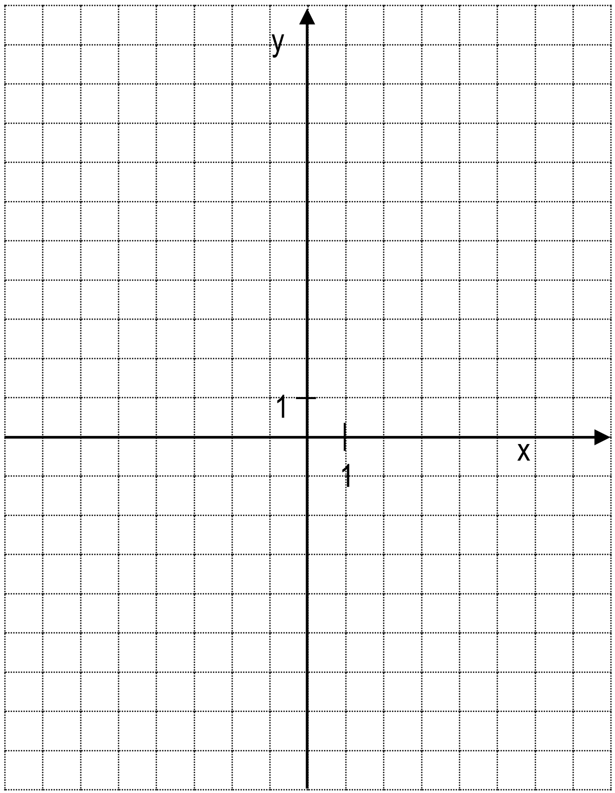
3. Zeichne im rechtwinkligen Koordinatensystem:

a. Zeichne das Dreieck mit den Eckpunkten A(2/2), B((-2)/ 4) und C(1/(-3))

b. Zeichne mit anderer Farbe das Dreieck, das du erhältst, wenn du jeden y-Wert mit (-2) multiplizierst, die x-Werte aber beibehältst.

c. Zeichne mit anderer Farbe das Dreieck, das du erhältst, wenn du jeden x-Wert des Ursprungsdreiecks mit (-1) multiplizierst, den y-Wert aber beibehältst.

d. Dividiere jeden y-Wert des Dreiecks aus der Aufgabe b) durch 2, multipliziere jeden x-Wert des Dreiecks bei Aufgabe c) mit (-2). Zeichne das neue Dreieck mit einer anderen Farbe.



5. Die Verbindung von Operationen verschiedener Stufe in $\mathbb{Z}$

1. Termanalyse

1. 1 Operatoren bestimmen und festlegen.

Sollen Operationen verschiedener Stufe verbunden werden, ist es ganz entscheidend, sich an den geltenden Gesetzen zu orientieren und diese auch für die Bestimmung der Operatoren zu verwenden.

- **Rechne immer von links nach rechts**
- **Klammern zuerst** behandeln (1. Einschränkung)
- **Operationen höherer Stufe zuerst** behandeln → „Punkt vor Strich“ (2. Einschränkung)

Anschliessend werden die uns bekannten Hilfsmittel eingesetzt:

- **Operationshierarchie**
- **Distributivgesetz**
- **Operatorkonzept**
- **Klammerregeln**

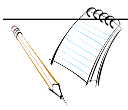
Beispiel einer Termanalyse:

$$12 + 4 \bullet (-7) + (-3) \bullet [(-8) - 13]$$

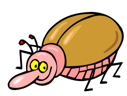
Operatoren: $\boxed{12}\ \boxed{+ 4 \bullet (-7)}\ \boxed{+ (-3) \bullet [(-8) - 13]}$ (Weil 2. Stufe stärker als 1. Stufe sind Operatoren hier so)

Term auflösen und umformen:

$12 + 4 \bullet (-7) + (-3) \bullet [(-8) - 13]$	Mit Distributivgesetz die eckige Klammer auflösen
$12 + 4 \bullet (-7) + (-3) \bullet (-8) - (-3) \bullet 13$	Punkt vor Strich: Produkte ausrechnen
$12 + (-28) + 24 - (-39)$	Vorzeichen bereinigen (- (-39) = + 39)
$12 + (-28) + 24 + 39$	Von links nach rechts rechnen
$(-16) + 24 + 39$	Von links nach rechts weiterrechnen
$8 + 39$	letzter Rechnungsschritt von links nach rechts
47	



Aufgaben zur Verbindung von Operationen verschiedener Stufe in $\mathbb{Z}$:



1. Berechne den Wert der folgenden Terme durch schrittweise Umformung. Schreibe die einzelnen Schritte in Stichworten daneben (siehe Beispiel oben)

a) $25 - (-34) - 7 \bullet [15 - (-3)]$

b) $(23 - 39) : (-8) + 5 \cdot (-34) - 4 \cdot [\,12 + (-30)\,]$

c) $(16 - (-28)) : (-4) - 5 \cdot [\,(-34) - 5\,] - 4$

d) $15 : (-3) + 11 - (43 - 6 \cdot [106 - 4 \cdot (26 - (-4)\,]\,]\,)$